

시험 문제의 문항별 중요도 계산 방법

엄준호 에듀허브(<http://www.eduhub.co.kr>)

본 문서는 학생들의 테스트 결과를 통해, 학생들에게 필요한 중요한 문제를 선별하는 방법에 대한 안내서입니다. 본 문서에서의 문항별 중요도 계산방법은 에듀허브를 통해 구현되어 있습니다. 본 문서의 내용에 대해 궁금한 점이 있는 경우, joonho.oum@gmail.com 으로 연락주시기 바랍니다. 작성일: 2017 년 7 월 12 일

I. 소개

학생들의 학업 성취도를 확인하기 위해서는 시험 형태의 테스트를 거치게 됩니다. 일반적으로 오답률이 높은 문제가 학생들이 어려워 하는 문제이므로, 오답률이 높은 문제들 위주로 수업에 사용하기도 합니다. 이러한 방법은 상위권 학생들에게는 적합한 방법입니다.

하지만, 중하위권 학생들에게 상위권 학생들과 동일하게 오답률이 높은 문제 위주로 수업을 한다면, 이는 좋은 방법이 아닙니다. 중하위권 학생들에게 오답률이 높은 문제를 중심으로 수업하는 경우 다음과 같은 문제들이 생길 수 있습니다.

1. 기본적인 학습이 되어 있지 않는 학생에게 무조건 어려운 문제를 풀게 하는 경우, 기본 문제들을 해결하면서 얻은 논리와 사고력을 통해 어려운 문제를 해결하는 것이 아닌, 특정 문제를 푸는 스킬 위주로 문제를 푸는 좋지 못한 습관을 가지게 할 수 있습니다.
2. 기본적인 학습이 되어 있지 않은 상태에서 어려운 문제 위주로 수업을 하게 되는 경우, 학생들의 문제에 대한 이해력은 떨어질수 밖에

없습니다

3. 중하위권 학생의 경우, 일반적으로 틀린 문제들이 많습니다. 따라서, 어려운 문제를 위주로 수업한다면, 정작 학생들에게 필요한 문제를 다룰 시간이 부족해질수 있습니다.

이러한 문제를 해결하기 위해서는 시험 문제중 어떠한 문제가 중하위권 학생들을 위한 중요한 문제인지를 따로 분류를 해야할 필요가 있습니다. 어려운 문제, 즉 오답률이 높은 문제의 경우 학생들의 테스트 결과를 통해 측정이 가능합니다. 하지만, 지금까지 시험문제중 어떠한 문제가 중요한 문제 선택하는 방법은 선생님의 주관적 판단에 맡겨져 왔었습니다.

본 문서에서는 문제의 중요도를 선생님의 주관적 판단이 아닌, 학생들의 테스트 결과를 통해 얻을수 있는 방법을 소개 합니다.

II. 어려운 문제 vs 중요한 문제

어려운 문제란, 학생들이 많이 틀리는 문제를 말합니다.

이 문서에서 이야기 하는 중요한 문제란, ‘이정도 문제는 풀어야 나중에 어려운 문제를 풀 가능성이 높아질수 있다’ 라고 할수 있는 문제 로 정의합니다

문제의 어려운 정도를 나타내는 척도로는 오답률이 있습니다. 테스트 시험지의 i 번 문항의 오답률(H_i)은 다음과 같이 정의 됩니다.

$$H_i = \frac{i\text{번 문항을 틀린 학생수}}{\text{시험을 본 전체 학생수}}$$

오답률은 0과 1사이의 값을 가지며, 오답률이 1인 경우 모

든 학생이 풀지 못한 문제이며, 0인 경우는 모든학생이 풀 문제입니다. 즉 오답률이 1에 가까울수록 어려운 문제이므로, 오답률(H_i)은 어려운 문제에 대한 정량적인 척도입니다.

오답률과는 달리 문제의 중요도를 나타낼수 있는 정량적인 척도가 마땅히 없었습니다. 따라서, 본 문서에서는 문제의 중요도를 새롭게 정의 합니다.

시험지의 i 번 문항의 중요도는 R_i 로 표기 합니다.

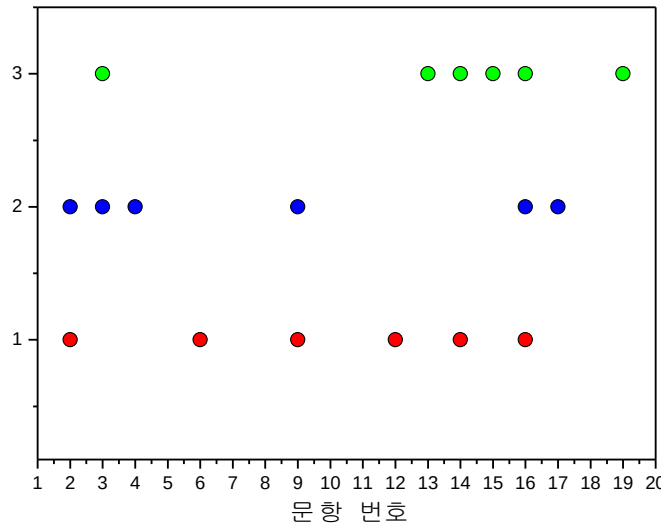
III. 중하위권 학생들의 성적과 틀린 문제

많은 선생님들이 중하위권 학생들이 틀리는 문제는 난이도가 높은 문제부터 낮은 문제 순서로 틀리게 될거라 생각하게 됩니다. 따라서, 동일한 성적을 가진 중하위권 학생들이 틀리는 문제는 서로 비슷할것이라 생각할수 있습니다. 하지만 이는 대부분의 경우 사실이 아닙니다.

예를들어 20문항의 테스트 시험지중 똑같이 6개의 틀려 70점의 동일한 성적을 받은 세명의 학생의 성적을 보면, 실제 3명의 학생이 동시에 틀린 문제는 1문제 밖에 되지 않으며, 심지어 3명의 학생이 모두 맞은 문제는 8문항밖에 되지 않습니다<그림1>. 이러한 경향은 성적이 낮을수록 더 커집니다.

즉, 성적이 낮은 중하위권 학생들은 오답률이 높은 문제 순서대로 틀리는게 아니라, 학생마다 서로 다른 학습 인지 요소에 의해 틀리는 문항이 서로 다릅니다.

반면, 성적이 높은 상위권 학생들은, 틀린 문제가 적을수록 대부분 오답률이 높은 같은 문제에서 틀리게 됩니다. 따라서, 상위권 학생들의 수업에서는 오답률이 높은 문제 위주로 수업하는것이 맞습니다.



< 그림 1 > 동일한 성적(70점)의 세명의 학생이 틀린 문항 (y축:학생번호)

IV. 문제 해결을 위한 확률값의 정의

학생이 특정한 문제를 풀수 있는지 없는지에 대한 문제는 일종의 확률문제로 생각할수 있습니다. 시험본 학생의 수가 상당히 크다면, i 번 문항의 오답률 H_i 는 평범한 학생 (평균정도의 성적을 가진 학생)이 i 번 문항을 틀릴 확률과 비슷한 값을 가지게 됩니다. i 번 문제를 풀 학생이 j 번 문항을 풀 확률을 p_{ij} 로 정의하기로 합니다. p_{ij} 의 값은 조건부확률의 값으로 다음과 같은 방법으로 계산됩니다.

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i\text{번문항과}j\text{번문항을 모두 맞은 학생수}}{\text{시험본 전체학생수}} \frac{1}{1-H_i} & (H_i \neq 1) \\ k & (H_i = 1) \end{cases}$$

p_{ij} 계산시, i 번 문제의 오답률이 1인경우가 있습니다.

즉 모든 학생이 i 번문항을 틀린경우, i 번 문항은 아무도 풀지 못한 문제 이므로, 이 문제를 풀정도의 학생이라면, 다른 문제들은 특정확률(k)값을 가지는것으로 합니다. 이 때 이 특정확률은 0.8정도의 값을 사용합니다.

V. 문제의 중요도의 정의

중요한 문제란 다음과 같은 성질을 가지는 문제로 정의 합니다..

1. 다른문제를 푸는데 도움이 많이 되는 문제일수록 중요한 문제이다.
2. 다른 중요한 문제를 풀 수 있어야 풀리는 문제 또한 중요한 문제이다

문제의 중요도는 다음과 같은 성질을 가진다고 예상할 수 있습니다.

1. 중요한 문제일수록 문제의 중요도는 높은 값을 가져야 한다.
2. 어떤 문제가 중요하다 중요하지 않다는 판단은 문항간 상대적인 판단 이므로, 문제의 중요도는 한 시험지내에 있는 문제들 사이에서만 상대적인 순위를 매길수 있는 값이다
3. 문제의 오답률이 높다고해서, 그 문제가 꼭 중요하다고 말할수는 없고, 오답률과 중요도는 상관관계가 작을수 있다.

시험지의 i 번 문항의 중요도를 R_i 라고 하면, R_i 는 다음과 같은 성질을 가져야 합니다

1. 다른 문제를 풀수 있는데 도움이 되는 문제는 중요한 문제 이므로, i 번문항을 풀었을때, 다른문제를 풀 가능성이 커진다면, R_i 의 값은 큰 값을 가지게 될것이다.
2. 중요도가 큰 문제를 풀 수 있어야 i 번문항을 풀수 있는 하는경우에도 R_i 는 큰 값을 가지게 될것이다.

위의 성질들을 만족하도록, 다음과 같이 시험문제의 중요도(R_i)를 정의합니다. 여기서는 시험 문항수가 3개인 간단한 경우를 예를 들어 설명합니다.

$$R_1 = \lambda[\alpha(p_{12} + p_{13})R_1 + (1-\alpha)(p_{21}R_2 + p_{31}R_3)]$$

$$R_2 = \lambda[\alpha(p_{21} + p_{23})R_2 + (1-\alpha)(p_{12}R_1 + p_{32}R_3)]$$

$$R_3 = \lambda[\alpha(p_{12} + p_{13})R_2 + (1-\alpha)(p_{13}R_1 + p_{21}R_2)]$$

R_1 을 예를 들어 설명하면, $(p_{12} + p_{13})R_1$ 는 1번 문항의 중요도와 1번을 풀었을때, 2번과 3번을 풀수있는 확률값들의 합과의 곱을 나타냅니다. $(p_{12} + p_{13})$ 이 클수록 1번 문항을 풀면 다른 문항을 풀 가능성이 높아지고, 1번 문제가 중요한 문제였다면, 당연히 1번문제의 중요도는 높아야 합니다. $(p_{12} + p_{13})R_1$ 는 1번문제를 풀었을때 다른문제를 풀수 있는 확률과 1번문제의 중요도의 곱을 나타내며, 이를 출력값이라 부르기로 합니다.

$(p_{21}R_2 + p_{31}R_3)$ 의 값은 2번과 3번을 풀었을때, 1번을 풀수 있는 확률과 각 문항의 중요도의 곱의 합을 나타냅니다. 이 값은 다른 문제를 풀었을때, 1번문제를 풀수 있는 확률과 중요도의 곱을 나타내므로, 입력값이라 부르기로 합니다. 예를들어, 1번 문제의 입력값이 크다는것은 1번문제는 풀수 있을 가능성이 많은 문제를 의미합니다.

입력값이 높고, 출력값이 높은 문제는 상대적으로 풀기 쉬우면서 이 문제를 풀수 있으면 다른 문제를 풀 가능성이 높은 문제이므로 ‘매우 좋은 문제’, 매우 중요한 문제라 할 수 있을 것입니다.

반면, 입력값이 낮고, 출력값이 낮은 문제는 풀기는 쉽지만, 다른 문제를 푸는데 도움이 안되는 문제이므로 ‘매우 안 좋은 문제’이라 볼수 있습니다. 입력값이 높고, 출력값이 낮은문제는 풀기는 쉬우나 다른 문제를 푸는데 큰 도움이 안되는 문제이므로 ‘안좋은 문제’로 분류합니다. 입력값이 낮으며, 출력값이 높은 문제는 풀기는 어려우나, 다른 문제를 푸는데 도움이 되는 문제이므로 ‘좋은문제’로 분류합니다

이러한 입력값(x)과 출력값(y)의 관계를 표로 나타내면 <표1>과 같습니다.

	출력값 낮음 $y = 0$	출력값 높음 $y = 1$
입력값 낮음 $x = 0$	매우안좋은문제 중요도: 0	좋은문제 중요도: 2
입력값 높음 $x = 1$	안좋은문제 중요도: 1	매우좋은문제 중요도: 3

< 표1> 입력값, 출력값과 문제의 중요도 (중요도와 입력값 출력값 수치는 상대적인값)

중요도는 절대적인 수치가 아닌 문항간의 상대적인 수치
이므로, 문제의 중요도를 <표1>과 같이 0~3까지의 값으로 간단히 생각할수 있습니다

만약 입력값을 x , 출력값을 y 라 한다면, 중요도는 다음과 같은 함수에 비례하는 값으로 생각할수 있습니다

$$f(x,y) = x + 2y$$

위의 경우, 입력값과 출력값에 곱해지는 상수의 비는 1:2
지만, 상황에 따라서 바뀔수도 있는 값입니다. 따라서,
 α 라는 값을 도입하여, 입력값과 출력값에 각각 α 와
 $1-\alpha$ 라는 상수를 곱한값을 계산에 사용합니다. 만약 상

수비가 1:2인경우 $\alpha = \frac{2}{3}$ 의값으로 결정하면 됩니다. 실

제 시험결과를 바탕으로 수치 계산해본 결과에 따르면 α
의 값의 변화에 따라 중요도의 값이 영향을 받기는 하지만,
문항별 중요도 순위는 거의 바뀌지 않습니다. 즉, 본문서
에서 정의하는 문제의 중요도는 α 값 보다는 i 번 문항을
맞았을때 j 번 문항을 맞을 확률인 p_{ij} 값에 크게 영향을
받습니다

최종적으로, 1번문항의 중요도는 입력값과 출력값에 α
와 $1-\alpha$ 을 곱한 값에 비례를 할것이고, 이때 사용되는 비
례 상수를 λ 로 정의합니다. 그래서 최종적인 1번문항의
중요도는 다음과 같습니다.

$$R_1 = \lambda[\alpha(p_{12} + p_{13})R_1 + (1-\alpha)(p_{21}R_2 + p_{31}R_3)]$$

VI. 문제의 중요도의 계산

앞에서 설명한 3개 문항으로된 시험지의 문항별 중요도를
행렬을 이용하면, 다음과 같이 간단히 나타낼수 있습니다

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_{12} + p_{13} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{21} + p_{23} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{31} + p_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{이때, } R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_{12} + p_{13} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{21} + p_{23} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{31} + p_{32} \end{pmatrix}$$

$$, A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \text{로 정의하면 위의 행렬식은}$$

다음과 같이 간단하게 표현할수 있습니다.

$$R = \lambda P A R = \lambda Q R \quad (Q = P A)$$

문제의 중요도는 시험지 내에 있는 문항들간의 상대적인
중요도이며, 행렬 R 의 각 성분 R_i 값들이 각 문항의 중요
도를 나타내게 됩니다.

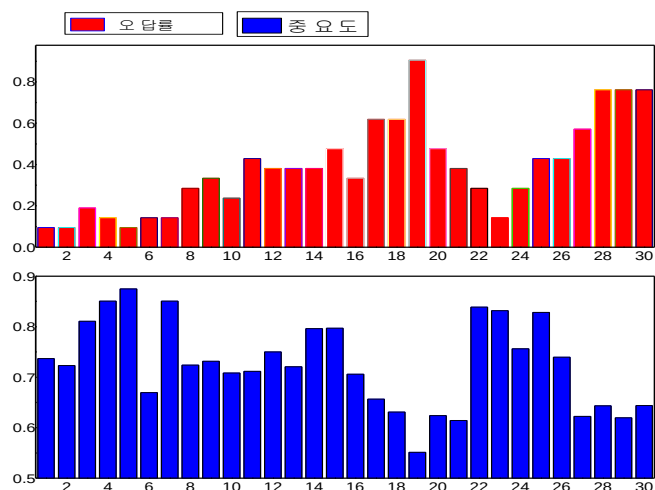
위의 식에서 행렬 R 을 구하는것은 결국 행렬 Q 의 고유
벡터(eigen vector)를 구하는 문제와 동일합니다. 이때,
행렬의 고유벡터는 행렬의 고유값(eigen value)이 가장
큰 실수값을 가질때의 고유벡터 벡터를 선택합니다.

따라서 문제의 중요도는 간단히 Q 행렬의 고유벡터를 통
해 구하게 됩니다.

문항수가 n 개인 시험지의 경우, $n \times n$ 크기의 Q 행렬에 대
한 고유벡터를 계산하면 됩니다

VII. 문제 중요도의 실제 예

위에서 설명한 오답률과 중요도는 '2014년 3월 고3 자연계열 교육청 수학 모의고사 시험지'에 21명 학생의 채점 결과를 바탕으로 계산하였습니다.



< 그림 2> 문항별 오답률(붉은색)과 중요도(파란색)

<그림2>에서 알 수 있듯이 오답률이 높은 문제라고 하여, 반드시 중요도가 높은 문제는 아닙니다. 반대로 오답률이 낮은 문제라고 하여 중요도가 높은 문제가 아닙니다. 중요도가 높은 문제는 상대적으로 오답률이 낮으면서(쉽게 풀 수 있으면서), 다른 문제들을 푸는데 도움이 될 가능성이 높은 문제입니다.

상위권 학생들은 오답률이 높은 문제를 위주로 수업을 해야 합니다. 하지만, 중하위권 학생들은 오답률이 높은 문제보다는 중요도가 높은 문제를 완전히 마스터 하여 사고력을 키운후, 오답률이 높은 문제에 도전하는것이 좋은 방법일수 있습니다.

본 문서에서 제시하는 알고리즘을 이용한, 문제의 중요도 계산은 에듀허브에 구현이 되어 있습니다.

에듀허브 홈페이지: <http://www.eduhub.co.kr>